قضیهٔ پیک

محمود نصیری

اشاره

با توجه به اضافه شدن قضیهٔ پیک، برای محاسبهٔ مساحت‌های چندضلعی‌های شبکه‌ای، به کتاب هندسهٔ ۱ سال دهم نظام جدید، در این مقاله دو هدف را دنبال کرده‌ایم:

۱. تعریف چندضلعی‌های شبکه‌ای و انجام فعالیت‌هایی که دانش‌آموزان به کمک آن‌ها بتوانند فرمول پیک را کشف کنند. این دقیقاً در راستای رویکرد کتاب درسی است. سپس کاربردهایی از قضیه پیک بیان می‌شوند.

۲. مطرح کردن زیباترین اثبات‌های موجود برای قضیهٔ پیک و در انتها بررسی مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای حفره‌دار.

کلیدواژه‌ها: نقاط شبکه‌ای، چندضلعی‌های شبکه‌ای، قضیهٔ پیک، رابطهٔ اویلر، ناحیهٔ چندضلعی حفره‌دار

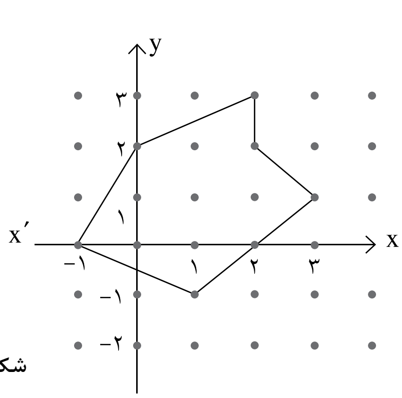
جرج الکساندر پیک (۱۹۴۲ ـ ۱۸۵۹) در شهر وین متولد شد، اما بیشتر زندگی علمی او در پراگ گذشت، پیک به سرعت دستیاری ریاضی‌دان‌ها و فیزیک‌دان‌های اواخر قرن نوزدهم را شروع کرد. از میان آن‌ها **ارنست‌ماخ** و **فلیکس کلاین** به ترتیب در فیزیک و ریاضی شهرتی داشتند.

در سال ۱۸۹۲، پیک استاد دانشگاه آلمانی پراگ شد؛ جایی که بعد از ۲۰ سال، نقشی کلیدی را در اعطای مدرک استادی در آن دانشگاه به فیزیک‌دان جوانی به نام **آلبرت انیشتین** ایفا کرد. این اولین انتصاب تمام وقت دانشگاهی برای انیشتین بود. این دو دوستی نزدیکی را که برگرفته از شور مشترک آن‌ها نسبت به علوم و موسیقی بود، شروع کردند.

پیک روی موضوع‌های زیادی از جمله جبر، هندسه و آنالیز کار می‌کرد، اما امروزه در اصل آنچه نام او را در خاطره‌ها زنده نگه داشته، قضیه‌ای زیبا و شگفت‌انگیز به نام اوست که در سال ۱۸۹۹ به چاپ رسید. قضیهٔ پیک در دوران زندگی او کمتر مورد توجه قرار گرفت، تا اینکه در سال ۱۹۵۰ در یک مجله و در سال ۱۹۶۹ در یک کتاب توسط **هیوج استین هاوس**[1] به چاپ رسید و به سرعت گسترش یافت.

قضیهٔ پیک فرمولی ساده برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای ارائه می‌دهد؛ چندضلعی‌هایی که رأس‌های آن‌ها روی نقطه‌های شبکه‌ای واقع‌اند. ابتدا نقطه‌های شبکه‌ای را بهتر بشناسیم.

به‌طور شهودی، اگر نقطه‌هایی روی خط‌های افقی یا عمودی واقع باشند و فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی روی خط افقی و عمودی برابر واحد باشد، چنین نقطه‌هایی را نقطه‌های شبکه‌ای می‌نامند.

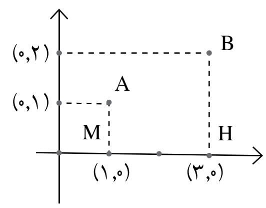


شکل ۱

به‌طـور دقیق‌تر، در دســتگاه محورهــای مختصات عمود بــر هم، نقطه‌هایی به مختصــات (m,n) را به‌طوری که n و m عددهای صحیح باشــند، نقطه‌های شبکه‌ای می‌نامند. بنابراین:

$L=\{(m,n)|m.n\in z\}$ نقطه‌های شبکه‌ای نامیده می‌شوند.

اگــر $i=(۱,۰)$ و $j=(۰,۱)$ بردارهــای یکهٔ محورهای $x'ox$ و $y'oy$ باشــند، $L=\{(mi+nj)|m.n\in z\}$ نمایــش دیگــری از نقطه‌های شبکه‌ای در دستگاه محورهای مختصات عمود بر هم است.

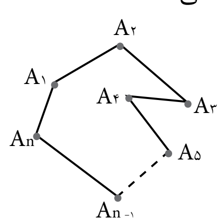


شکل۲

مطابــق شــکل۲، $A=i+j=(۱,۱)$، $B=۳i+۲j=(۳,۲)$ نمایش نقطه‌های شــبکه‌ای به کمک بردارهای یکه هســتند. همچنین: $H=۳i$. اکنون به کمک نقطه‌های شبکه‌ای به تعریف چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌پردازیم ابتدا تعریف چندضلعی را در صفحه یادآوری می‌کنیم.

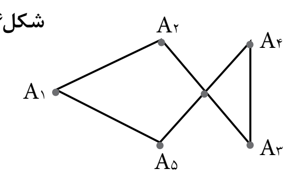
تعریف۱. عدد صحیح ثابت $n\geq ۳$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $A_1,A_2,...,A_n$، n نقطهٔ متمایز در صفحه باشند. اجتماع همهٔ پاره‌خط‌های $\overline{A_1A_2}...\overline{A_{n-1}A_n}$ و $\overline{A_nA_1}$ را در صورتی که هر پاره‌خط فقط دو پاره‌خط دیگر را در نقطه‌های انتهایی خودش قطع کند و هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند روی یک خط نباشند چندضلعی می‌نامیم.

$A_1A_2...A_n$ یک nضلعی است.



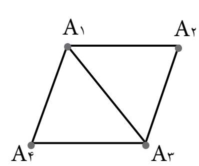
شکل۳

چندضلعی است.



شکل۴

چندضلعی نیست.



شکل۵

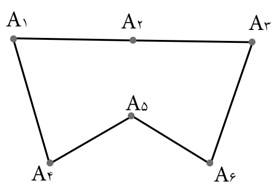
چندضلعی نیست.

تعریف فوق را به‌صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد.

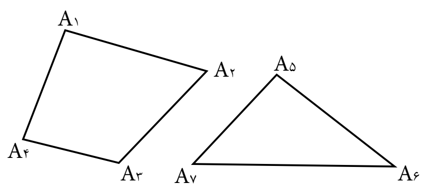
تعریف۲: چندضلعــی اجتماع $n\geq ۳$ پاره‌خط متوالی هم صفحه است، به‌طوری که هر پاره‌خط فقط دو پاره‌خط دیگر را در دو نقطهٔ انتهایی خودش قطع کند و هر دو پاره‌خط متوالی روی یک خط نباشند.

آخرین شرط فقط برای این است که چندضلعی بر حسب n تعداد ضلع‌ها کاملاً مشخص باشد. مثلاً شکل ۶ یک پنج‌ضلعی است و شش‌ضلعی نیست، در واقع $\overline{A_1A_3}$ یک ضلع است.

در تعریف ۲، بــه کار بردن کلمهٔ متوالی بــرای پاره‌خط‌ها لازم اســت. زیرا در غیر این‌صورت در شکل۷، اجتماع دو شکل، یک چندضلعی محسوب می‌شود. اما در تعریف ۱ چنین اتفاقی رخ نخواهد داد، چرا؟ به بیان غیررســمی چندضلعی یک تکه یا یکپارچه است.



شکل۶



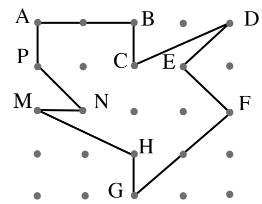
شکل۷

اکنون که با تعریف چندضلعی آشنا شدیم، چندضلعی‌های شبکه‌ای تعریف می‌کنیم.

تعریف۳. هــر گاه تمام رأس‌های یــک چندضلعی روی نقطه‌های شبکه‌ای باشند. آن را چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

هر چندضلعی شبکه‌ای نیز یک چندضلعی است، با این تفاوت که رأس‌های آن روی نقطه‌های شبکه‌ای واقع‌اند. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های شبکه‌ای روی ضلع‌ها و رأس‌ها را «**نقطه‌های مرزی یا کرانه‌ای**[2]» چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند. این مجموعه نقطه‌ها را B می‌نامیم و تعداد آن‌ها را به b نشان می‌دهیم: $b=|B|$.

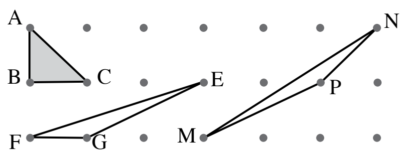
مجموعــهٔ همــهٔ نقطه‌هــای شــبکه‌ای درون چندضلعی شــبکه‌ای را «**نقطه‌های درونی شــــبکه‌ای**»[3] آن می‌نامند، مجموعــهٔ آن‌ها را به I و تعداد آن‌ها را به i نشــان می‌دهیم. ABCDEFGHMNP یک ۱۱ضلعی شبکه‌ای است که در آن $b=۱۳$ و $i=۳$ است (شکل ۸).



شکل ۸

ضلع‌های چندضلعی شبکه‌ای ممکن است علاوه بر رأس‌ها شامل نقطه یا نقطه‌های شبکه‌ای دیگری نیز باشند.

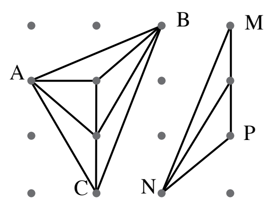
در هر چندضلعی شبکه‌ای داریم: $i \geq ۰$ و $b \geq ۳$. کمترین مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر $\frac{۱}{۲}$ است که یک مثلث شبکه‌ای است. این مثلث را مثلث مقدماتی یا اولیه می‌نامند در شکل ۹، ΔABC و ΔEFG و ΔMNP مثلث‌های مقدماتی هستند.



شکل ۹

تعریف ۴. مثلث شبکه‌ای را یک مثلث مقدماتی می‌نامیم هرگاه به غیر از رأس‌های آن شامل هیچ نقطهٔ شبکه‌ای درونی و مرزی دیگری نباشد.

بنابراین در هر مثلث شبکه‌ای مقدماتی $b=۳$، $i=۰$، ثابت می‌شود که مساحت آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است. هر مثلث شبکه‌ای را می‌توانیم به مثلث‌های مقدماتی تبدیل کنیم.

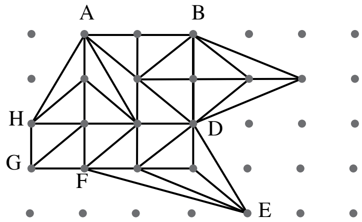


شکل ۱۰

به‌طور کلی هر چندضلعی شبکه‌ای را به کمک نقطه‌های مرزی و درونی شبکه‌ای می‌توانیم به مثلث‌های مقدماتی مثلث‌بندی کنیم.

در شکل ۱۱ یک مثلث‌بندی چندضلعی شبکه‌ای را مشاهده می‌کنید. البته این عمل ظاهراً بدیهی به نظر می‌رسد، اما به اثبات نیاز دارد؛ به ویژه وقتی چندضلعی محدب نباشد. هشت‌ضلعی ABCDEFGH به ۲۳ مثلث مقدماتی مثلث‌بندی شده است. پس مساحت آن $\frac{۲۳}{۲}$ است این چندضلعی دارای ۹ نقطهٔ مرزی شبکه‌ای و ۸ نقطهٔ درونی شبکه‌ای است؛ $b=۹$ و $i=۸$. اگر حاصل $\frac{۹}{۲}+۸-۱$ را محاسبه‌کنیم، برابر $\frac{۲۳}{۲}$ می‌شود. این اتفاقی نیست و همان فرمولی است که به دنبالش هستیم.

قضیهٔ پیک می‌تواند یک نتیجهٔ کلاسیک فرمول اویلر باشد



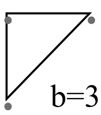
شکل ۱۱

قضیهٔ پیک که به اذعان ریاضی‌دان‌ها خود قضیه‌ای زیبا و شگفت‌انگیز است. روشی ساده برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی شبکه‌ای بر حسب تعداد نقطه‌های مرزی شبکه‌ای (b) و تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای (i) ارائه می‌دهد که فرمولی ارزشمند در هندسهٔ مقدماتی است. اثبات قضیهٔ پیک برای دانش‌آموزان ضروری نیست، ولی باید با ارائهٔ فعالیت‌هایی مشابه آنچه در کتاب درسی بیان شده است، دانش‌آموزان را برای کشف فرمول راهنمایی کنیم.

اساس این فعالیت‌ها را معمولاً می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد:

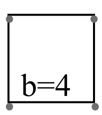
مرحلهٔ ۱

ابتدا آن دسته از چندضلعی‌های شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که هیچ نقطهٔ درونی شبکه‌ای نداشته باشند؛ یعنی در آن‌ها $i=۰$، سپس b را به ترتیب ۳، ۴، ۵، ۶و... اختیار و مساحت‌ها را محاسبه می‌کنیم. اکنون از دانش‌آموزان می‌خواهیم رابطه‌ای بین تعداد نقطه‌های مرزی شبکه‌ای و مساحت چندضلعی شبکه‌ای کشف کنند.



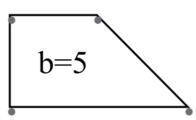
شکل ۱۲

$S=\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}-۱$



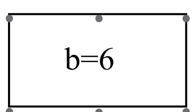
شکل ۱۳

$S=۱=\frac{۴}{۲}-۱$



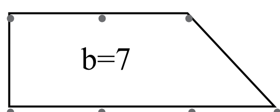
شکل ۱۴

$S=\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}-۱$



شکل ۱۵

$S=۲=\frac{۶}{۲}-۱$

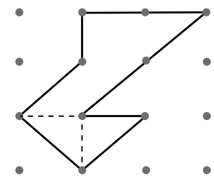


شکل ۱۶

$S=\frac{۵}{۲}=\frac{۷}{۲}-۱$

حتی می‌توانیم چندضلعی‌های شبکه‌ای را در نظر بگیریم که شکل هندسی آن‌ها چندضلعی‌های معروف نباشند. اما در آن‌ها داشته باشیم: $i=۰$ مثلاً در شکل ۱۷ داریم: $b=۹$ و $S=\frac{۱}{۲}+۱+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$ در این حالت نیز: $S=\frac{۹}{۲}-۱$.

شکل ۱۷



اکنـــون با توجه به الگوی به‌دســـت آمـــده، از دانش‌آموزان می‌خواهیم که فرمولی را برای محاســـبهٔ مساحت این ناحیه‌ها حدس بزنند.

حدس زده می‌شـــود که اگر هر چندضلعی شبکه‌ای هیچ نقطهٔ شبکه‌ای درونی نداشته باشد، آن‌گاه؛ $S=\frac{b}{2}-1$ یا به عبارت دیگر: $S=\frac{b}{2}-1+0$.

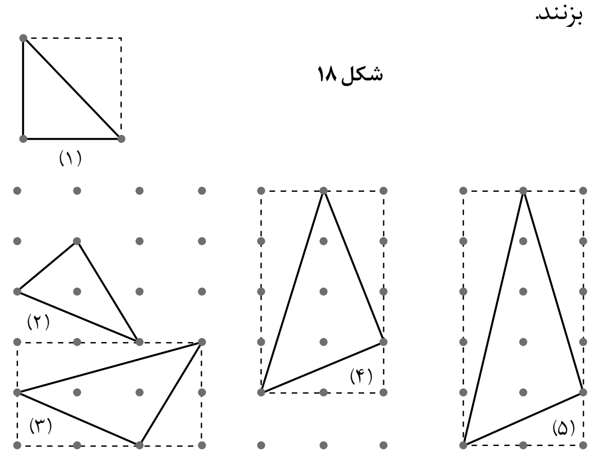
مرحلهٔ ۲

b را ثابـــت در نظر می‌گیریم و به i مقدارهای ۰، ۱، ۲، ۳ و ... را می‌دهیم برای سادگی محاسبه‌ها b=۳ را انتخاب می‌کنیم.

بنابر مرحلهٔ اول، مقدار $\frac{b}{2}-1$ را برای مساحت‌ها داریم. باید تعیین کنیم با تغییر i مساحت چگونه تغییر می‌کند.

اکنون از دانش‌آموزان می‌خواهیم تا رابطه‌ای بین مساحت هر مثلث و i (تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای آن مثلث) حدس بزنند.

شکل ۱۸



باید دانش‌آموزان بتوانند با به کار بردن محاسبهٔ مساحت‌های مثلث‌ها یا مستطیل‌ها یا هر چهارضلعی معروف دیگر و استفاده از نقطه‌چین‌های رسم شده، مساحت‌های مثلث‌ها را محاسبه کنند.

در جدول ۱ مشـــاهده می‌کنیم که وقتی b ثابت است، به ازای ... ، ۳، ۲، ۱، i=۰ مساحت چگونه بر حسب i تغییر می‌کند. بنابراین حدس زده می‌شود که،

$$S=\frac{b}{2}-1+i$$

جدول ۱

شمارهٔ شکل	۱۸-۱	۱۸-۲	۱۸-۳	۱۸-۴	۱۸-۵
b تعداد نقطه‌های مرزی	۳	۳	۳	۳	۳
i تعداد نقطه‌های درونی	۰	۱	۲	۳	۴
S مساحت	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
پیدا کردن یک الگو برای S	$\frac{3}{2}-1+0$	$\frac{3}{2}-1+1$	$\frac{3}{2}-1+2$	$\frac{3}{2}-1+3$	$\frac{3}{2}-1+4$
$S=\frac{b}{2}-1+i$	$\frac{b}{2}-1+0$	$\frac{b}{2}-1+1$	$\frac{b}{2}-1+2$	$\frac{b}{2}-1+3$	$\frac{b}{2}-1+4$

با اضافه کردن هر عدد به تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای، به مســـاحت آن نیز همان عدد افزوده می‌شود یعنی اگر داشته باشیم: b=۴ و مشابه قبلی: ... ، ۳، ۲، ۱، ۰ = i به نتیجه‌های مشابه می‌رسیم.

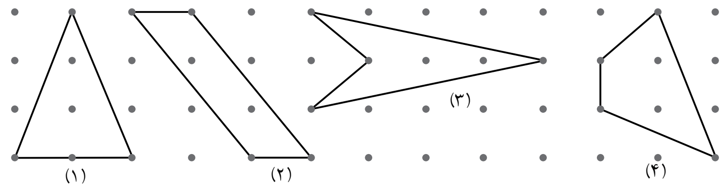
در فعالیت‌های بالا توانستیم فرمولی را برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای بر حســـب تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی و درونی آن حدس بزنیم. بنابراین قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ پیک: در هر چندضلعی شبکه‌ای اگر تعداد نقطه‌های مرزی شبکه‌ای b و تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای آن i باشد، آنگاه مساحت آن برابر است با: $S=\frac{b}{2}+i-1$

علاوه بر فعالیت‌های قبلی که برای حدس فرمول پیک برای دانش‌آموزان مفید است. روش دیگری به کمک دستگاه معادله‌ها وجود دارد که در ادامه بررسی می‌کنیم.

تحقیق در قضیهٔ پیک به کمک دستگاه معادلات

فعالیت۱. چهار چندضلعی شبکه‌ای را که تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی آن‌ها با هم و همچنین تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی آن‌ها نیز برابر باشد، رسم می‌کنیم در شکل‌های رسم شده داریم: b=۴ و i=۲ سعی می‌کنیم چندضلعی‌هایی را انتخاب کنیم که به کمک فرمول‌های قبلی، مساحت‌های آن‌ها محاسبه می‌شوند.



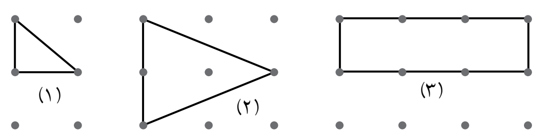
شکل ۱۹

مثلاً در شکل‌های ۱ ـ ۱۹، ۲ ـ ۱۹ و ۳ ـ ۱۹ کافی است فرمول مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع را به کار ببریم در شکل ۴ ـ ۱۹ باید مساحت سه مثلث قائم‌الزاویه را از مساحت مستطیل کم کنید. مشاهده می‌کنید که در تمام این چندضلعی‌ها مساحت‌های ناحیه‌های چندضلعی برابر ۴ واحد سطح است.

چنین به نظر می‌رسد که مساحت‌های چندضلعی شبکه‌ای به تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی و درونی چندضلعی ـ در صورت وجود ـ وابسته است. بنابراین می‌خواهیم فرمولی را برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای پیدا کنیم که بستگی به b و i، تعداد نقطه‌های مرزی و درونی شبکه‌ای داشته باشد.

حدس می‌زنیم که این فرمول باید رابطه‌ای بر حسب b و i باشد. کلی‌ترین رابطه بر حسب b و i که از درجهٔ اول باشند، به این صورت است: $S = mb + ni + k$، که در آن m، n و k عددهایی ثابت هستند. چگونه آن‌ها را تعیین می‌کنیم؟

از دانش‌آموزان بخواهیم که سه چندضلعی را که تعداد نقطه‌های مرزی و درونی شبکه‌ای حداقل دوتا از آن‌ها متمایز باشند، رسم کنند؛ به‌طوری که محاسبهٔ مساحت آن‌ها ساده باشد. شکل‌های ۱ـ۲۰، ۲ ـ ۲۰ و ۳ ـ ۲۰ می‌توانند یک انتخاب باشند.



شکل ۲۰

اکنون عددهای متناظر هر شکل را در رابطهٔ $S = mb + ni + k$ جای‌گذاری می‌کنیم.

جدول ۲

	شکل ۱ ـ ۲۰	شکل ۲ ـ ۲۰	شکل ۳ ـ ۲۰
b	۳	۴	۸
i	۰	۱	۰
s	$\frac{۱}{۲}$	۲	۳

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲} = ۳m + k \\ ۲ = ۴m + n + k \\ ۳ + ۸m + k \end{cases}$$

معادلهٔ اول را از معادلهٔ سوم کم می‌کنیم: $۵m = \frac{۵}{۲}$

در نتیجه: $m = \frac{۱}{۲}$ و سپس: $k = -۱$ و $n=۱$. بنابراین فرمول به‌صورت $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ خواهد بود.

کاربردهایی از قضیهٔ پیک

یکی از کاربردهای قضیهٔ پیک محاسبهٔ مساحت شکل‌های نامنظم هندسی است که آن‌ها را با هر تقریب دلخواه می‌توانیم محاسبه کنیم. کافی است واحد را به هر اندازه که لازم می‌دانیم کوچک اختیار کنیم. مساحت برگ‌های درختان مساحت جای پای موجودات و به‌طور کلی، مساحت هر شکل مسطحی که حتی شکل منظم هندسی نداشته باشد، می‌تواند به کمک قضیهٔ پیک با هر تقریبی محاسبه شود.

نکتهٔ مهم در فرمول $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ این است که مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای عددی گویاست. اگر b زوج باشد، مساحت یک عدد صحیح است. پس در هر چندضلعی شبکه‌ای داریم: $s=k$ یا $S = k + \frac{۱}{۲}$ که k عددی صحیح و نامنفی است. از این ویژگی در حل مسئله‌ها می‌توان استفاده کرد.

مسئلهٔ ۱: مساحت هر مربع شبکه‌ای عددی صحیح و مثبت است. مختصات دو رأس مجاور را (a،b) و (c،d) فرض کرده و مساحت را محاسبه کنید.

مسئلهٔ ۲: هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات تمام رأس‌های آن عددهای صحیح باشند.

اگر اندازهٔ هر ضلع آن m باشد، داریم: $S = \frac{m^۲\sqrt{۳}}{۴}$ اما $m^۲ = (a-c)^۲ + (b-d)^۲$ و صحیح است. S نیز گویا است. پس باید $m^۲ \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ گویا باشد که امکان ندارد.

هر گاه فقط مساحت مثلث یا هر چندضلعی را داشته باشیم، معمولاً بی‌شمار جواب برای مسئله وجود دارد. برای مثال، اگر مساحت مثلثی برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه: $۱۲ = \frac{ah}{۲}$ یا $ah = ۲۴$ حال می‌توانیم بی‌شمار عدد مثبت a و h پیدا کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۴ باشد. از $a = \frac{۲۴}{h}$ برای هر مقدار مثبت h مقدار مثبتی برای a به دست می‌آید.

بنابراین برای هر عدد حقیقی مثبت x، بی‌شمار جواب برای مسئله وجود دارد که مساحت آن‌ها برابر x باشد. اما در چندضلعی‌های شبکه‌ای این‌گونه نیست. چنانچه توضیح دادیم، مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای یا عدد صحیح k است یا عدد

گویـــای $k+\frac{۱}{۲}$ که k عددی صحیح و نامنفی اســـت. در موارد زیادی می‌توان تعداد چندضلعی‌های شـــبکه‌ای را که مساحت آن‌ها معلوم است، مشخص کرد فعالیت۲ را در نظر می‌گیریم.

فعالیت۲. آیا یک چندضلعی شبکه‌ای وجود دارد که مساحت آن برابر $\frac{۷}{۳}$ باشد؟

آیا عدد صحیح k به‌گونه‌ای وجود دارد که داشـــته باشیم: $\frac{۷}{۳}=k+\frac{۱}{۲}$. نشـــان دهید هیچ دو عـــدد b و i وجود ندارند که: $\frac{۷}{۳}=\frac{b}{۲}+i-۱$ یا: $b+۲i=\frac{۲۰}{۳}$. اگر مســـاحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر $\frac{۵}{۲}$ باشد. چگونه i و b (تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونـــی و مرزی) آن را مشـــخص می‌کنید؟ باید i و b را چنان تعیین کنید که: $\frac{۵}{۲}=\frac{b}{۲}+i-۱$ که معادل $b+۲i=۷$ اســـت ($b\geq ۳$ و $i\geq ۰$).

اولین مقدار b برابر ۳ اســـت که از آن داریم: **۲**=i . اگر **۴**=b آیـــا جوابی برای i وجود دارد؟ اگر ۵=b آن‌گاه: ۱=i و بالاخره اگر ۷= b، آن‌گاه: ۰=i .

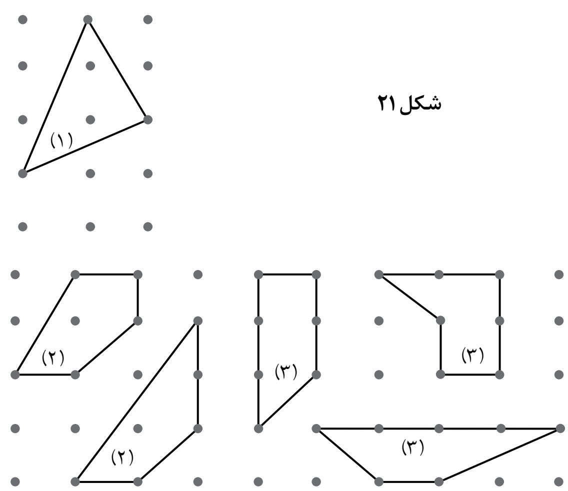
آیا جـــواب دیگری برای b و i وجـــود دارد؟ چرا؟ اکنون با توجه بـــه مقدارهای b و i چندضلعی‌های متناظری برای آن‌ها رسم کنید.

۱) $b=۳, i=۲$

۲) $b=۵, i=۱$

۳) $b=۷, i=۰$

باید دانش‌آموزان را ترغیب کرد که قبل از مشاهدۀ پاسخ‌های زیر سعی کنند نمونه‌هایی را رسم کنند.



شکل ۲۱

قضیۀ پیک فرمولی ساده برای محاسبۀ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای ارائه می‌دهد؛ چندضلعی‌هایی که رأس‌های آن‌ها روی نقطه‌های شبکه‌ای واقع‌اند. ابتدا نقطه‌های شبکه‌ای را بهتر بشناسیم

در مرحله‌های قبلی سعی کردیم با توجه به مثال‌های شهودی فرمـــول پیک را حدس بزنیم. در هیچ کدام از مراحل قبلی هنوز چیزی را ثابت نکرده‌ایم. اکنون در ادامه سعی می‌کنیم اثبات‌هایی را بـــرای قضیۀ پیک بیان کنیم. اولین اثبات هر چند که طولانی اســـت، اما به این دلیل اهمیت دارد که طی مرحله‌های متفاوت انجام می‌شود و هر مرحله خود می‌تواند از نظر آموزشی مهم باشد.

دومین اثبات که اثباتی از قضیۀ پیک اســـت، توسط. **مانیا رامان** و **دنیل اهمان** بیان شده است. این اثبات مبتنی بر اندازۀ زاویه‌های درونی مثلث و زاویه‌های جهت‌دار است.

سومین اثبات به کمک **«رابطۀ اویلر»** انجام می‌شود و نشان می‌دهد، قضیۀ پیک می‌تواند نتیجه‌ای از رابطۀ اویلر در گراف‌های همبند و مسطح باشد.

اثبات‌های متفاوت برای قضیۀ پیک

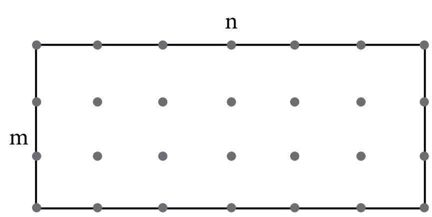
اثبات۱.

در این اثبات ابتدا آن را برای مستطیل و سپس برای مثلث در حالت‌های متفاوت ثابت می‌کنیم و حالت کلی را که در مورد هر چندضلعی شبکه‌ای وجود دارد، از آن نتیجه می‌گیریم.

الف) فرض کنیم یک مســـتطیل شبکه‌ای داشته باشیم که ضلع‌هـــای آن افقی و عمودی باشـــند. اندازه‌های دو ضلع آن را عددهای طبیعی m و n در نظر می‌گیریم. دانش‌آموزان را ترغیب می‌کنیم با استفاده از عددهای m و n تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی و درونی این مستطیل را محاسبه کنند.

وقتی اندازۀ یک ضلع عدد طبیعی n اســـت. روی آن چند نقطۀ شبکه‌ای وجود دارد؟ چرا؟

شکل ۲۲



طبق فرمول‌های قبلی در مورد مساحت مستطیل، مساحت این مستطیل شبکه‌ای $S=mn$ اســـت. اکنون از دانش‌آموزان می‌خواهیم که قضیۀ پیک را برای محاسبۀ مساحت این مستطیل شبکه‌ای به کار ببرند.

ابتدا از دانش آموزان می‌خواهیم تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی و درونی را بشمارند. در این مورد حتماً باید به دانش‌آموزان وقت داده شود تا آن‌ها را محاسبه کنند. ممکن است هر فردی به روشی آن را پیدا کند. یک روش می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

برای تعیین تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی با انتخاب یک گوشهٔ مستطیل به‌عنوان نقطهٔ شروع و حرکت در جهت ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد، آن‌ها را می‌شماریم.

از هر گوشه که شروع کنیم، وقتی اندازهٔ یک ضلع عدد طبیعی n است، آن ضلع شامل $n+1$ نقطهٔ شبکه‌ای است. پس وقتی از یک گوشه شروع می‌کنیم و روی یک ضلع نقطه‌های شبکه‌ای را می‌شماریم. آخرین نقطه روی آن ضلع را که یک رأس است و روی ضلع دیگر نیز قرار دارد. برای ضلع بعدی به حساب می‌آوریم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. توجه داشته باشید که از روش‌های متفاوتی می‌توانید استفاده کنید. در هر صورت پاسخ آن $b=۲(m+n)$ است.

تعیین تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی ساده‌تر است.

چرا؟ $i=(m-۱)(n-۱)=mn-n-m+۱$

در یک مستطیل شبکه‌ای که ضلع‌ها افقی و قائم هستند، داریم:

$$S=mn=mn-m-n+۱+m+n-۱=i+\frac{b}{۲}-۱=\frac{b}{۲}+i-۱$$

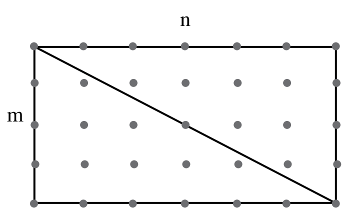
بنابراین قضیهٔ پیک در مورد مستطیل ثابت شد. در قسمت بعدی آن را ابتدا برای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ آن افقی و عمودی باشند، و سپس برای هر مثلث دلخواه ثابت می‌کنیم.

ب) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که ضلع‌های زاویهٔ قائمه آن افقی و عمودی هستند.

مطابق شکل ۲۳، روی این مثلث یک مستطیل بنا می‌کنیم که وتر مثلث قائم‌الزاویه یک قطر آن باشد. سعی می‌کنیم مساحت این مثلث شبکه‌ای را به کمک مساحت مستطیل شبکه‌ای ساخته شده محاسبه کنیم.

اگر تعداد نقطه‌های شبکه‌ای روی وتر به جز نقطه‌های دو سر وتر را k فرض کنیم. آن‌گاه در این مثلث داریم: $b=m+n+۱+k$. چرا؟

تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی این مثلث را چگونه محاسبه کنیم؟



شکل ۲۳

پیک روی موضوع‌های زیادی از جمله جبر، هندسه و آنالیز کار می‌کرد، اما امروزه در اصل آنچه نام او را در خاطره‌ها زنده نگه داشته، قضیه‌ای زیبا و شگفت‌انگیز به نام اوست که در سال ۱۸۹۹ به چاپ رسید

$(m-۱)(n-۱)-k$ تعداد نقطه‌های شبکه‌ای چه ناحیه‌ای را نشان می‌دهد؟

آیا می‌توان گفت در این مثلث، اگر i تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی باشد، آن‌گاه: $i=\frac{(m-۱)(n-۱)-k}{۲}$

بنابراین:

$$\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{m+n+۱+k+(m-۱)(n-۱)-k}{۲}-۱=\frac{mn}{۲}$$

در نتیجه قضیهٔ پیک برای هر مثلث قائم‌الزاویهٔ شبکه‌ای که ضلع‌های زاویهٔ قائمه آن عمودی و افقی باشند، برقرار است.

اکنون قضیه را برای هر مثلث شبکه‌ای دلخواه ادامه می‌دهیم. در اساس باید سه حالت در نظر گرفته شوند:

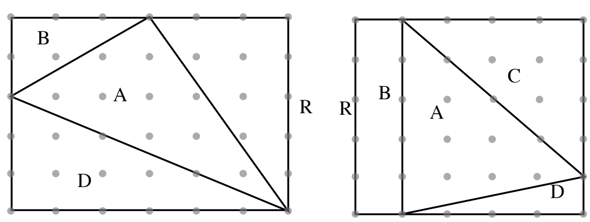
حالت اول: دو ضلع مثلث عمودی و افقی هستند که در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه است و آن را ثابت کردیم.

حالت دوم: فقط یک ضلع مثلث افقی یا قائم است.

حالت سوم: هیچ ضلع مثلث افقی یا قائم نیست.

در تمام این حالت‌ها یک مستطیل شبکه‌ای روی مثلث بنا می‌کنیم که رأس‌های مثلث روی این مستطیل واقع باشند، و ضلع‌های مستطیل شبکه‌ای عمودی و افقی باشند. در شکل ۲۴ آن‌ها را مشاهده می‌کنید.

شکل ۲۴



واضح است که در هر دو حالت داریم:

$$S_A=S_R-(S_B+S_C+S_D) \qquad (۱)$$

که S_R مساحت مستطیل بزرگ است.

قسمت اساسی پیداکردن رابطه‌ای بین تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی و درونی مثلث‌ها و مستطیل ساخته شده است. البته در حالت دوم ناحیهٔ B یک ناحیهٔ مستطیلی است و در اثبات‌ها اهمیتی ندارد.

در تمام حالت‌ها چه رابطه‌ای بین نقطه‌های شبکه‌ای مرزی ناحیه‌ها وجود دارد؟

آیا می‌توان گفت مجموع تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی مستطیل R و مثلث A برابر مجموع تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی سه ناحیهٔ B، C و D است؟ چرا؟ بنابراین:

$$b_A = b_B + b_C + b_D - b_R \qquad (۲)$$

رابطهٔ بین نقطه‌های شبکه‌ای درونی این ناحیه‌ها چگونه است؟

در شمردن نقطه‌های شبکه‌ای درونی باید به این نکته توجه داشته باشیم. نقطه‌های شبکه‌ای مرزی مثلث A به جز نقطه‌های سه رأس آن، نقطه‌های درونی شبکه‌ای مستطیل R نیز محسوب می‌شوند. بنابراین رابطهٔ زیر را داریم:

$$i_A + i_B + i_C + i_D + (b_A - ۳) = i_R$$

در نتیجه:

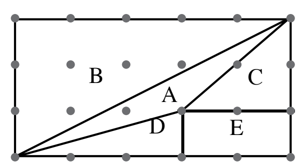
$$i_R - i_A - b_A = (i_B + i_C + i_D) - ۳ \qquad (۳)$$

اکنون قضیه پیک برای همهٔ ناحیه‌های B، C، D و R برقرار است. می‌خواهیم آن را برای ناحیهٔ A ثابت کنیم. از (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{aligned} s_A &= s_R - (s_B + s_C + s_D) \\ &= \frac{b_R}{۲} + i_R - ۱ - \left(\frac{b_B + b_C + b_D}{۲} + i_B + i_C + i_D - ۳\right) \\ &= \frac{b_R}{۲} + i_R - ۱ - \left(\frac{b_A + b_R}{۲} + i_R - b_A\right) = \frac{b_A}{۲} + i_A - ۱ \end{aligned}$$

تذکر: در حالتی که ناحیهٔ مثلثی A مطابق شکل ۲۵ باشد، یعنی مثلث یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد. اثبات مانند حالت‌های قبلی است؛ با این تفاوت که ناحیهٔ مستطیلی E را نیز داریم که قبلاً در مورد مستطیل شبکه‌ای قضیه ثابت شده است در نتیجه:

$$s_A = s_R - (s_B + s_C + s_D + s_E)$$

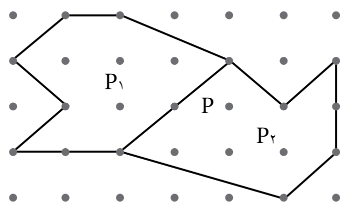


شکل ۲۵

بنابراین قضیهٔ پیک برای هر مثلث شبکه‌ای دلخواه ثابت شد. اکنون به استقرا می‌توان نشان داد که قضیهٔ پیک برای هر چندضلعی شبکه‌ای دلخواه برقرار است. زیرا ثابت می‌شود که هر چندضلعی شبکه‌ای را می‌توان مثلث‌بندی کرد.

یکی از کاربردهای قضیهٔ پیک محاسبهٔ مساحت شکل‌های نامنظم هندسی است که آن‌ها را با هر تقریب دلخواه می‌توانیم محاسبه کنیم

فقط کافی است نشان دهیم که قضیهٔ پیک برای دو چندضلعی جمع‌پذیر است. به این معنی که اگر دو چندضلعی $P_۱$ و $P_۲$ فقط در یک ضلع مشترک باشند و هیچ نقطهٔ مشترک دیگری نداشته باشند و قضیه پیک برای $P_۱$ و $P_۲$ برقرار باشد، آن‌گاه برای $P = P_۱ \cup P_۲$ نیز برقرار است.



شکل ۲۶

فرض کنیم k تعداد نقطه‌های شبکه‌ای روی مرز دو چندضلعی باشد. سعی می‌کنیم رابطه‌ای بین تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی و همچنین تعداد نقطه‌های مرزی شبکه‌ای دو چندضلعی $P_۱$ و $P_۲$ با چندضلعی P پیدا کنیم.

$$i_P = i_{P_۱} + i_{P_۲} + k - ۲ \quad \text{و} \quad b_p = b_{P_۱} + b_{P_۲} - ۲k + ۲$$

$$\begin{aligned} s_P &= s_{P_۱} + s_{P_۲} = \frac{b_{P_۱} + b_{P_۲}}{۲} + i_{P_۱} + i_{P_۲} - ۲ \\ &= \frac{b_p + ۲k - ۲}{۲} + i_p - k + ۲ - ۲ \\ &= \frac{bp}{۲} + i_p - ۱ \end{aligned}$$

اثبات ۲.

اثبات قضیهٔ پیک با به کاربردن اندازهٔ زاویه‌های درونی مثلث‌ها

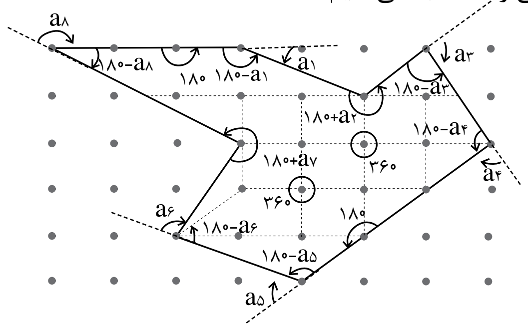
این اثبات زیبا براساس محاسبهٔ مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث‌های مقدماتی به دو روش است. در این اثبات نیز از دو ویژگی که قبلاً بیان کردیم استفاده می‌کنیم:

۱. هر چندضلعی شبکه‌ای را می‌توانیم به تعداد متناهی مثلث مقدماتی مثلث‌بندی کنیم.

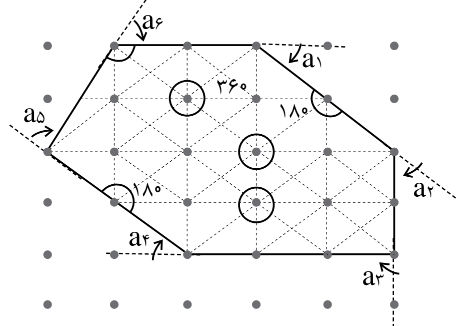
۲. مساحت هر مثلث مقدماتی $\frac{۱}{۲}$ است.

فرض کنیم یک چندضلعی شبکه‌ای دلخواه را به n مثلث مقدماتی مثلث‌بندی کرده‌ایم. مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی این n مثلث مقدماتی برابر $۱۸۰n$ است. اکنون به

روش دیگری مجمـــوع اندازه‌های زاویه‌هـــای این مثلث‌های مقدماتی را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲۷



فرض کنیم i تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی و b تعداد نقطه‌های شـــبکه‌ای مرزی این چندضلعی شبکه‌ای باشد. در تمـــام رأس‌های این مثلث‌های مقدماتی که درون چندضلعی واقع‌اند، مجمـــوع اندازه‌های زاویه‌ها برابر ۳۶۰ i اســـت. تمام ضلع‌های چندضلعـــی را در یک جهت امتـــداد می‌دهیم. در رأس‌هایی از این مثلث‌ها که روی نقطه‌های شـــبکه‌ای مرزی هستند، مجموع اندازه‌های زاویه‌ها ۳۶۰ ـ $۱۸۰b$ است. در هر رأس که رأس چندضلعی نباشد، مجموع در هر یک ۱۸۰ است. چرا؟ و اگر این رأس، رأس چندضلعی نباشد، اندازه در هر یک $۱۸۰-\alpha_i$ یا $۱۸۰+\alpha_i$ اگر چندضلعی محدب باشـــد، همواره $۱۸۰-\alpha_i$است که هر α_i یک زاویهٔ خارجی آن است. در نتیجه مجموع اندازه‌ها برابر است با: $۱۸۰b-\sum\alpha_1=۱۸۰b-۳۶۰$.
اگر چندضلعی محدب نباشد، زاویهٔ خارجی تعریف نمی‌شود. به همین دلیل زاویه‌های دارای اندازهٔ α_i را جهت‌دار در نظر می‌گیریم که مجموع اندازه‌ها با توجه به مقادیر مثبت و منفی برابر ۳۶۰ است؛ یعنی: $\sum\alpha_i=۳۶۰$ مانند آن است که روی یک دایره گاهی به جلو و گاهی به عقب حرکت می‌کنیم. اما در کل یک دور کامل دایره را که ۳۶۰ است، می‌پیماییم.

بنابراین، مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی این n مثلث، برابر $۳۶۰i+۱۸۰b-۳۶۰$ اســـت که باید برابـــر همین مقدار $۱۸۰n$ شود. در نتیجه؛

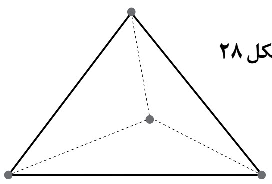
$$۱۸۰n=۳۶۰i+۱۸۰b-۳۶۰$$

پـــس: $n=۲i+b-۲$ اما اگر S مســـاحت این چندضلعی شبکه‌ای باشد، آن‌گاه داریم: $S=\frac{۱}{۲}n$.
بنابراین: $S=\frac{۱}{۲}n=i+\frac{b}{۲}-۱$ که به فرمول پیک می‌رسیم.

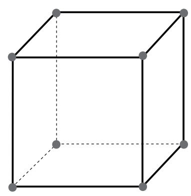
رابطهٔ اویلر و قضیهٔ پیک[4]

قضیهٔ پیک می‌تواند یک نتیجهٔ کلاسیک فرمول اویلر باشد. ســـاده‌ترین فرم شهودی فرمول اویلر در مورد چندوجهی‌هاست اگـــر تعداد رأس ها در چند وجهی‌های رســـم شـــده v، تعداد وجه‌ها برابر F و تعداد یال‌ها برابر L باشد، مشاهده می‌کنید که:

$$V+F=L+۲$$



شکل ۲۸

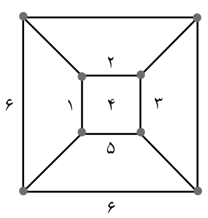


شکل ۲۹

اما صورت کلی‌تر در مورد گراف‌های همبند و مسطح است. گراف‌هایی را کـــه بین هر دو رأس آن‌ها مســـیری وجود دارد، همبنـــد، می‌نامند، و هرگاه هیچ یالی، یال‌های دیگر را به جز در رأس‌ها قطع نکرده باشـــد، **«مسطح»** می‌نامند. رأس‌ها و یال‌ها مشخص‌اند، اما منظور از وجه، ناحیه‌هایی از صفحه هستند که توسط یال‌ها جدا می‌شوند و یک وجه که در شکل ۳۰ با شمارهٔ ۶ نشـــان داده شده، یک ناحیهٔ نامتناهی اســـت. در این گراف؛

$$F=۶, V=۸, L=۱۲$$

بنابراین: $F+V=L+۲$



شکل ۳۰

اثبات ۳. اثباتی از قضیهٔ پیک به کمک رابطهٔ اویلر

فرض کنیم یک ناحیهٔ چندضلعی شبکه‌ای را به مثلث‌های مقدماتی تبدیل کرده باشـــیم. این فرم مثلث‌بندی را به‌عنوان یک گراف همبند مســـطح در نظـــر می‌گیریم. رأس‌های این گراف همان رأس‌های مثلث‌های مقدماتی هســـتند. بنابراین این ناحیه‌های مثلث‌هـــای مقدماتی، ناحیهٔ درون چندضلعی

قضیهٔ پیک که به اذعان ریاضی‌دان‌ها خود قضیه‌ای زیبا و شگفت‌انگیز است. روشی ساده برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی شبکه‌ای بر حسب تعداد نقطه‌های مرزی شبکه‌ای (b) و تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای (i) ارائه می‌دهد که فرمولی ارزشمند در هندسهٔ مقدماتی است

شبکه‌ای را به ۱ ـ F ناحیهٔ متناهی تقسیم می‌کنند. (ناحیهٔ نامتناهی را کم کرده‌ایم). بنابراین مساحت ناحیهٔ این چندضلعی برابر است با: $S = \frac{۱}{۲}(F-۱)$ (مساحت هر مثلث مقدماتی $\frac{۱}{۲}$ است) . ضلع‌های مثلث‌های مقدماتی یال‌های این گراف هستند: هر کدام که درون چندضلعی هستند، ضلع دو مثلث و هر کدام که روی مرز چندضلعی هستند، ضلع یک مثلث هستند. بنابراین اگر e تعداد ضلع‌های درونی و b تعداد ضلع‌های مرزی در این مثلث‌بندی باشند. آن‌گاه b برابر همان تعداد نقطه‌های مرزی چندضلعی شبکه‌ای است.

در نتیجه داریم: $۳(F-۱) = ۲e + b$ که از آن نتیجه می‌شود: $۳F = ۲e + b + ۳$ یا: $F = ۲(e-F) + B + ۳$ (۱).

توجه داشته باشیم که ضلع‌های درونی، هر کدام دوبار شمرده شده‌اند. اما ضلع‌های مرزی فقط یک بار در هر مثلث شمرده شده‌اند.

بنابراین تعداد ضلع‌های مرزی برابر همان تعداد نقطه‌های مرزی شبکه‌ای در چندضلعی شبکه‌ای هستند؛ یعنی برابر همان b هستند.

همچنین تعداد رأس‌های گراف مسطح مورد نظر، یعنی v، برابر تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی و درونی از چندضلعی شبکه‌ای است.

در نتیجه:

$$V = b + i$$

اگر L تعداد تمام یال‌های گراف مسطح مورد نظر باشد. آن‌گاه داریم: $L = e + b$ اکنون کافی است رابطهٔ اویلر را در مورد این گراف مسطح به کار ببریم.

$$F + V = L + ۲ \Rightarrow F + b + i = e + b + ۲$$

در نتیجه: $e - F = i - ۲$ اکنون از رابطهٔ (۱) داریم.

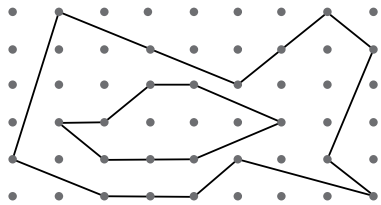
$$F = ۲(e-F) + b + ۳ = ۲(i-۲) + b + ۳ = ۲i + b - ۱$$

در نتیجه:

$$S = \frac{۱}{۲}(F-۱) = \frac{۱}{۲}(۲i + b - ۱ - ۱) = \frac{b}{۲} + i - ۱$$

که همان فرمول پیک است.

قضیهٔ پیک و ناحیهٔ چندضلعی حفره‌دار



شکل ۳۱

در شکل ۳۱ دو چندضلعی شبکه‌ای را که یکی درون دیگری است مشاهده می‌کنید. فرض کنید می‌خواهیم مساحت ناحیهٔ سایه‌زده، یعنی مساحت ناحیهٔ بین ناحیه‌های دو چندضلعی را محاسبه کنیم فکر می‌کنید چگونه آن را محاسبه کنیم؟

شاید اولین فکری که به نظر برسد، این باشد که بگوییم: مساحت‌های دو ناحیهٔ چندضلعی را محاسبه و مساحت ناحیهٔ کوچک‌تر را از مساحت ناحیهٔ بزرگ‌تر کم می‌کنیم. این روشی است که به‌طور طبیعی به ذهن می‌رسد. فرض کنیم مساحت‌های چندضلعی‌های شبکه‌ای بزرگ‌تر و کوچک‌تر به ترتیب $S_۱$ و $S_۲$ و مساحت ناحیهٔ بین آن دو S باشد. با استفاده از قضیهٔ پیک داریم:

$$S = S_۱ - S_۲ = \left(\frac{b_۱}{۲} + i_۱ - ۱\right) - \left(\frac{b_۲}{۲} + i_۲ - ۱\right)$$

$$= \frac{b_۱ - b۲}{۲} + i_۱ - i_۲ = \frac{۱۳-۸}{۲} + ۲۱ - ۳ = \frac{۴۱}{۲}$$

$b_۱$ و $b_۲$ به ترتیب تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی چندضلعی‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر و به همین ترتیب $i_۱$ و $i_۲$ تعداد نقطه‌های شبکه ای درونی آن‌ها هستند.

می‌خواهیم ببینیم آیا با روش دیگری مستقیماً می‌توانیم آن را محاسبه کنیم؟ روشی که در آن فقط از تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی و درونی ناحیهٔ سایه‌زده استفاده شود؟

فرض کنیم برای ناحیهٔ سایه‌زده تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی b و تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی آن i باشد واضح است که: $b = b_۱ + b_۲$.

اکنون تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی آن، یعنی i را چگونه محاسبه‌می‌کنیم؟

آیا رابطهٔ $i_۱ = i + b_۲ + i_۲$ درست است؟ بنابراین: $i_۱ - i_۲ = i + b_۲$.

واضح است که تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی چندضلعی بزرگ‌تر برابر مجموع تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی ناحیهٔ

سایه‌زده و ناحیهٔ کوچک‌تر و تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی ناحیهٔ کوچک‌تر است. اکنون اگر بتوانیم $s = s_۱ - s_۲$ برحسب b و i، یعنی تعداد نقطه‌های شـــبکه‌ای درونی و مرزی ناحیهٔ سایه‌زده بنویسیم، به هدف اصلی رسیده‌ایم:

$$S = S_۱ - S_۲ = \left(\frac{b_۱}{۲} + i_۱ - ۱\right) - \left(\frac{b_۲}{۲} + i_۲ - ۱\right)$$
$$= \frac{b_۱ - b_۲}{۲} + i_۱ - i_۲ = \frac{b_۱ + b_۲}{۲} + i$$
$$= \frac{b}{۲} + i$$

بنابراین: $S = \frac{b}{۲} + i$.

مثال قبلی را با این فرمول حل می‌کنیم: $S = \frac{۲۱}{۲} + ۱۰ = \frac{۴۱}{۲}$

اگر به رابطهٔ $S = \frac{b}{۲} + i$ دقت کنیم. از مقایسهٔ آن با فرمول پیک برای چندضلعی‌ها، مشاهده می‌کنیم که به نظر می‌رسد عدد ۱- حذف شده است. اگر این روند را برای یک چندضلعی بـــا دو حفره انجام دهیم، مشـــاهده می‌کنیم: $S = \frac{b}{۲} + i + ۱$. به‌طور کلی: اگر چندضلعی دارای m حفره باشد، آن‌گاه داریم: $S = \frac{b}{۲} + i - ۱ + m$. در حالت m=۰، یعنی وقتی هیچ حفره‌ای نداشته باشـــیم، به همان قضیهٔ اصلی پیک می‌رسیم بنابراین قضیهٔ کلی زیر را داریم:

اگـــر m چندضلعی شـــبکه‌ای که هیچ نقطـــه یا ناحیهٔ مشترک نداشته باشند. به‌عنوان m حفره درون یک چندضلعی شـــبکه‌ای مفروض باشـــند، در این صورت مســـاحت ناحیهٔ باقی‌مانده درون این چنـــد ضلعی برابر، $S = \frac{b}{۲} + i - ۱ + m$ است.که در آن i تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درون این ناحیه و b تعداد نقطه‌های مرزی روی همهٔ چندضلعی‌هاست که برابر با همان تعداد نقطه‌های شـــبکه‌ای روی مرزهای ناحیهٔ مورد نظر است.

فرض کنیـــم، $S_۰$ مســـاحت ناحیهٔ چندضلعی شـــبکه‌ای، S_j مســـاحت هر ناحیهٔ چندضلعی حفره‌ای و S مساحت ناحیهٔ باقی‌مانده (بدون حفره) باشد، آن‌گاه.

$$S = S_۰ - \sum_{j=۱}^{m} S_j = \frac{b_۰}{۲} + i_۰ - ۱ - \sum_{j=۱}^{m}\left(\frac{b_j}{۲} + i_j - ۱\right)$$
$$= \frac{b_۰}{۲} + i_۰ - ۱ + m - \sum_{j=۱}^{m}\left(\frac{b_j}{۲} + i_j\right) \quad (۱)$$

اگر b تعداد نقطه‌های شـــبکه‌ای مرزی ناحیهٔ باقی‌مانده و i تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درونی آن باشد، آن‌گاه:

$$b = b_۰ + \sum_{j=۰}^{m} b_j$$

$$i = i_۰ - \sum_{j=۱}^{m}(i_j + b_j)$$

چرا؟ توجه داشته باشیم که تعداد نقطه‌های شبکه‌ای مرزی این m حفره برای چندضلعی شبکه‌ای اصلی نقطه‌های شبکه‌ای درونی هستند.

بنابراین از (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}\left(b - \sum_{j=۰}^{m} b_j\right) + i + \sum_{j=۱}^{m}(i_j + b_j) - ۱ + m - \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{m} b_j - \sum_{j=۱}^{m} i_j$$
$$= \frac{b}{۲} + i - ۱ + m$$

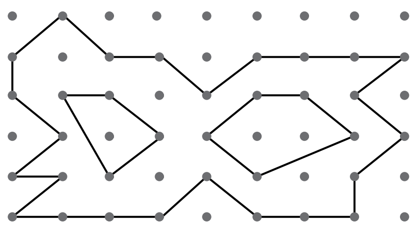
مثال:

مساحت ناحیهٔ سایه زده را محاسبه کنید.

پاسخ:

دو حفره داریم، پس: m =۲، b=۳۳ و i =۴. در نتیجه:

$$S = \frac{۳۳}{۲} + ۴ - ۱ + ۲ = \frac{۴۳}{۲}$$



شکل ۳۲

پی‌نوشت‌ها

1.Hugo Steinhaus
2. Boundary Points
3. Interior Points
4. Euler's formula

منابع

۱. هندسهٔ ۱، ســـال دهم، کتاب درسی وزارت آموزش‌وپرورش، سال ۱۳۹۷.
۲. نصیری، محمود (۱۳۹۴)، مبانی و مفاهیم هندســـهٔ متوسطه. انتشارات مبتکران.
3.TWO BEAUTIFUL PROOFS OF PICK,S THEOREM . manya Raman and Daniel Ohman Umea University
4. PROOFS FROM THE BOOK Martin Aigner. Gunter M.Ziegler, Springer.
5. Davis. T. Pick's Theorem (Oct. 2003).